1. Máme

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$
$$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

Odtud dostáváme

$$\sin(\sinh x) = x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{1}{6}\left(x+\frac{x^3}{6}\right)^3+\frac{x^5}{120}+o(x^5) = x-\frac{x^5}{15}+o(x^5)$$

a

$$x\cos(\tfrac{x}{\sqrt{3}}) = x\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{216}+o(x^5)\right) = x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{216}+o(x^5)$$

Proto je

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sinh x)-x}{\sin x - x\cos(\frac{x}{\sqrt{3}})} \\
&\quad= \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^5}{15}+o(x^5)-x}{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{216})+o(x^5)} \\
&\quad= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^5}{15}+o(x^5)}{\frac{x^5}{270}+o(x^5)} = -18
\end{aligned}$$

2. Definiční obor musí být očividně podmnožinou $\mathbb{R}^+$ kvůli přítomnosti $\log x$. Lehce ověříme, že

$$-1 \le \frac{2t}{t^2+1} \le 1$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$ a proto přítomnost arccos neznamená žádné další omezení a definiční obor funkce f je $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$.

Limity v krajních bodech definičního oboru:

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

Funkce nemá žádné užitečné symetrie, na svém definičním oboru je spojitá. Průsečíky s osou x:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{2\log x}{\log^2 x + 1} = 1 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = \mathrm{e}.$$

První derivace:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\log x}{\log^2 x + 1}\right)^2}} \frac{\frac{2}{x}(\log^2 x + 1) - 2\log x \cdot 2\log x \cdot \frac{1}{x}}{(\log^2 x + 1)^2} \\
&= \sqrt{\frac{(\log^2 x + 1)^2}{(\log^2 x - 1)^2}} \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{\log^2 x - 1}{(\log^2 x + 1)^2} \\
&= \frac{2\,\mathrm{sgn}\,(\log^2 x - 1)}{x(\log^2 x + 1)}
\end{aligned}$$

Očividně výše uvedený výpočet funguje ve všech bodech D_f mimo body, kde $\log^2 x = 1$, což jsou body $x = \mathrm{e}$ a $x = \mathrm{e}^{-1}$.

Protože jmenovatel $f'(x)$ je kladný na definičním oboru $f(x)$, lehce tak usoudíme, že f je rostoucí na $(0, \mathrm{e}^{-1})$, klesající na $(\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e})$ a rostoucí na $(\mathrm{e}, +\infty)$.

V bodě $x = \mathrm{e}^{-1}$ je lokální maximum v hodnotě $\arccos(-1) = \pi$ a v bodě $x = \mathrm{e}$ je lokální minimum v hodnotě $\arccos 1 = 0$. Obor hodnot je proto $[0, \pi]$.

V krajním bodě definičního oboru a v bodech lokálních extrémů, kde neexistuje derivace, můžeme spočítat alespoň jednostranné derivace pro přesný obrázek

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0_+} f'(x) &= +\infty \\
\lim_{x \to \mathrm{e}^{-1}_-} f'(x) &= \mathrm{e} \\
\lim_{x \to \mathrm{e}^{-1}_+} f'(x) &= -\mathrm{e} \\
\lim_{x \to \mathrm{e}_-} f'(x) &= -\mathrm{e}^{-1} \\
\lim_{x \to \mathrm{e}_+} f'(x) &= \mathrm{e}^{-1}
\end{aligned}$$

Druhá derivace:

$$f''(x) = 2\,\mathrm{sgn}\,(\log^2 x - 1)\left(-\frac{1}{x^2(\log^2 x + 1)} - \frac{2\log x}{x(\log^2 x + 1)^2 x}\right)$$
$$= -2\,\mathrm{sgn}\,(\log^2 x - 1)\frac{1}{x^2}\cdot\frac{(\log x + 1)^2}{(\log^2 x + 1)^2}$$

Znaménko druhé derivace opět určuje znaménko výrazu $\log^2 x - 1$ a proto f je konkávní na $(0, \mathrm{e}^{-1})$, konvexní na $(\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e})$ a konkávní na $(\mathrm{e}, +\infty)$.

Asymptota v $+\infty$ je funkce $y = \frac{\pi}{2}$. Graf vypadá takto: